Arithmétique

1. Diviseurs d'un nombre et PGCD

a) Vocabulaire

$$\begin{array}{r|l} 689 & 37 \\ \cline{2-2} -37 & \\ \cline{1-1} 319 & 18 \\ -296 & \\ \cline{1-1} 23 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 416 & 8 \\ \cline{2-2} -40 & \\ \cline{1-1} 16 & 52 \\ -16 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

400 est ***divisible*** par 8.
400 est un ***multiple*** de 8.
8 est un ***diviseur*** de 400.
8 ***divise*** 400.

$689 = 37 \times 18 + 23$

$416 = 8 \times 52$

b) PGCD de deux nombres

Exemple : Trouver tous les diviseurs de 24 et 60.

Diviseurs de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
Diviseurs de 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Diviseurs communs à 24 et 60: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
12 est le **p**lus **g**rand **d**iviseur **c**ommun de 24 et 60.

On dit que ***12 est le PGCD de 24 et 60***.
On note ***PGCD (12 ;60) = 12***

$24 = 1 \times 24$	$60 = 1 \times 60$
$24 = 2 \times 12$	$60 = 2 \times 30$
$24 = 3 \times 8$	$60 = 3 \times 20$
$24 = 4 \times 6$	$60 = 4 \times 15$
	$60 = 5 \times 12$
	$60 = 6 \times 10$

La recherche des diviseurs communs peut s'avérer très longue. Il faut donc trouver une autre façon de faire.

2. Recherche du PGCD

Exemple : calculer PGCD (60 ;24)

a) Par soustractions successives

$60 - 24 = 36$

$36 - 24 = \mathbf{12}$

$12 - 12 = 0$

PGCD (12 ;60) = 12

b) Par divisions successives

(Algorithme d'Euclide)

$60 = 24 \times 2 + \mathbf{12}$

$24 = 12 \times 2 + 0$

PGCD (12 ;60) = 12
Le PGCD est le dernier reste non nul.

Application : Calculer le PGCD de 702 et 273.

a) Par soustractions successives

$702 - 273 = 429$
$429 - 273 = 156$
$273 - 156 = 117$
$156 - 117 = 39$
$117 - 39 = 78$
$78 - 39 = \mathbf{39}$
$39 - 39 = 0$

c) Par divisions successives

$702 = 273 \times 2 + 156$
$273 = 156 \times 1 + 117$
$156 = 117 \times 1 + 39$
$117 = 39 \times 3 + 0$

PGCD (702 ;273) = **39**

3. Nombres premiers entre eux

Exemple : Calculer le PGCD de 45 et 28.

Les diviseurs de 45 sont :	1, 3, 5, 9, 15, 45
Les diviseurs de 28 sont :	1, 2, 4, 7, 14, 28
Le seul diviseur commun est 1.	

Donc PGCD (45 ; 28) = 1

On dit que 45 et 28 sont ***premiers entre eux.***

Définition : Deux nombres entiers sont ***premiers entre eux*** si leur PGCD est égal à 1. Leur seul diviseur commun est 1.

Définition : Un nombre entier est ***premier*** si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

4. Fraction irréductible

Définition : $\frac{a}{b}$ est une fraction est ***irréductible*** si a et b sont premiers entre eux.

Pour rendre une fraction irréductible (simplifier), on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Exemples: $\frac{45}{28}$ est irréductible car 45 et 28 sont premiers entre eux.

PGCD (24 ;60) = 12

donc $\frac{24}{60} = \frac{24 \div 12}{60 \div 12} = \frac{2}{5}$

5. Problème résolu

Un fleuriste dispose de 2184 géraniums et 2002 bégonias.
Il veut tous les ranger dans des caissettes qui contiennent le même nombre de plantes de chaque sorte, mais le plus petit possible.

a) Combien de caissettes peut il remplir ?
b) Quelle sera la composition de chaque caissette ?

Soit n le nombre de caissettes, g le nombre de géraniums et b le nombre de bégonias par caissette.
n = PGCD (2184 ; 2002)
n = 182

$g = \frac{2184}{182}$ $g = \frac{2002}{182}$

g = 12 g = 11

Il remplira 182 caissettes contenant chacune 12 géraniums et 11 bégonias.